2 Signaltheorie

Signaleinteilung		endliche Energie $\downarrow$ deterministische S.	endliche Leistung $\downarrow$ stochastische S.
Signal	$s(t) \in \mathbb{C}$; $\overline{T}$: Intervall, Länge T Funktionenraum $L_2(\overline{T})$	$\int_{\overline{T}} \lvert s(t)\rvert^2 dt < \infty$	$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \lvert s(t)\rvert^2 dt < \infty$
Folgen	$x(\mu) \in \mathbb{C}$; $\mathbb{N}$:Indexmenge, N Elemente $N-$dimensionaler komplexwertiger Vektorraum $\mathbb{C}^N$	$\sum_{\mu\in\mathbb{N}} \lvert x(\mu)\rvert^2 < \infty$	$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{\mu=-N}^{N} \lvert x(\mu)\rvert^2 < \infty$

2.1 Deterministische Signaltheorie

2.1.1 Vektorraum

- Operanden : Vektoren $x \in \mathbf{X}$ (z.B. $L_2(\overline{T}), \mathbb{C}^N, \mathrm{mod}_N, ..$)
  Skalare $\lambda \in \mathbf{L}$ (z.B. $\mathbb{R}; \mathbb{C}; \mathbf{Z}; \{0, 1\}; ..$)
- Operatoren: Vektoraddition $+$(punkt$-$oder komponentenweise, modulo ($\oplus$ $\odot$), ..)
  Skalaraddition $+$ und Skalarmultiplikation $\cdot$
  skalare Multiplikation $\cdot$ mit Vektoren

Axiomatische Eigenschaften:

• Kommutative Gruppe	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	: Kommutativgesetz,
	$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$	: Assoziativgesetz,
	$x + 0 = x,\ 0 \in \mathbf{X}$	: Neutraler Vektor,
	$x + (-x) = 0,\ -x \in \mathbf{X}$	: Inverser Vektor,
	$x_1 + x_2 \in \mathbf{X}\ \ \forall\ \ x_1, x_2 \in \mathbf{X}$	: Abgeschlossenheit,
• Abgeschlossenheit	$\lambda \cdot x \in \mathbf{X}\ \ \forall\ \ x \in \mathbf{X},\ \lambda \in \mathbf{L},$	
• gemischtes Distributivg.	$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x = (\lambda_1 \cdot x) + (\lambda_2 \cdot x),$	
• gemischtes Assoziativg	$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot x = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot x),$	
• neutraler Skalar	$1 \cdot x = x,\ 1 \in \boldsymbol{L}.$	

Z. B. $\mathbb{R}^N$, Polynome, stetige Fkt. über [a b], ...

2.1.2 Unterraum

- $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$: wenn **S** abgeschlossen bzgl. $+$und $\cdot$, dann ist auch **S** Vektorraum

2.1.3 Metrik

Topologie: Abstandsmaß in **X**: $\mathrm{d}(x_1, x_2) \mapsto \mathbb{R}_0^+$

Geforderte Eigenschaften :
- $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(x_2, x_1)$: Symmetrie
- $\mathrm{d}(x_1, x_3) + \mathrm{d}(x_3, x_2) \geq \mathrm{d}(x_1, x_2)$: Dreiecksungleichung

Z. B. $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 : x_1 = x_2 \\ 1 : \text{sonst} \end{cases}$ ($\hat{=}$Hamming−Abstand) .

2.1.4 Norm

Maß für Vektoren $x \in \mathbf{X}$: $\| x \| \mapsto \mathbb{R}_0^+$

Geforderte Eigenschaften:
- $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\| \lambda \cdot x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$
- $\| x_1 \| + \| x_2 \| \geq \| x_1 + x_2 \|$: Dreiecksungleichung

Gebräuchliche Normen:

$$\underbrace{\sqrt{\sum_{\mu \in \mathbb{N}} |x(\mu)|^2}\ ;\ \sqrt{\int_T |x(t)|^2 dt}\ ;}_{\mathrm{L}_2 - \mathit{Norm} : \|x\|_2} \quad \underbrace{\sum_{\mu} |x(\mu)|\ ;}_{\mathrm{L}_1 - \mathit{Norm} : \|x\|_1} \quad \underbrace{\max_{\mu} |x(\mu)|\ ;}_{\mathrm{L}_\infty - \mathit{Norm} : \|x\|_\infty} \quad \underbrace{\sqrt[p]{\sum_{\mu} |x(\mu)|^p}\ ,\ p \neq 0}_{\mathrm{L}_p - \mathit{Norm} : \|x\|_p}$$

(Hölder−Norm)

- Durch Norm erzeugte Metrik: $\mathrm{d}(x_1, x_2) := \| x_1 - x_2 \|$.
- Vollständiger (d. h. enthält Grenzwert) Raum mit Norm heißt Banach−Raum.

2.1.5 Skalarprodukt

Geometrische Struktur von **X** : $< x_1, x_2 > \mapsto \mathbb{C}$

- geforderte Eigenschaften:
  - $< x,x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $< x,x > \in \mathbb{R}_0^+$
  - $< x_1,x_2 > = (< x_2,x_1 >)^*$
  - $< (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2), x_3 > = \lambda_1 \cdot < x_1,x_3 > + \lambda_2 \cdot < x_2,x_3 >$
- Banach−Raum mit Skalarprodukt heißt Hilbert−Raum.
- Beachte: $< \lambda \cdot x_1,x_2 > = \lambda < x_1,x_2 >$, aber $< x_1,\lambda \cdot x_2 > = \lambda^* < x_1,x_2 >$.
- Cauchy−Schwarz−Ungleichung (CSU):
  - $| < x_1,x_2 > | \leq \sqrt{< x_1,x_1 > \cdot < x_2,x_2 >}$,
  - "=" gilt für $x_2 = \lambda \cdot x_1$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.1.6 Euklidsche Norm

$\| x \| = \sqrt{< x,x >}$ (L_2−Norm)

$\longrightarrow$ CSU: $| < x_1,x_2 > | \leq \| x_1 \| \cdot \| x_2 \|$

- Euklidscher Abstand (durch Norm erzeugte Metrik):

$$d(x_1,x_2)^2 = \| x_1 - x_2 \|^2 = < (x_1-x_2),(x_1-x_2) > = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 - (< x_1,x_2 > + < x_2,x_1 >)$$

$$= \ldots = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 - 2 \cdot \mathrm{Re}[< x_1,x_2 >] \;;\quad \mathrm{Re}[x] = \frac{1}{2}(x + x^*)$$

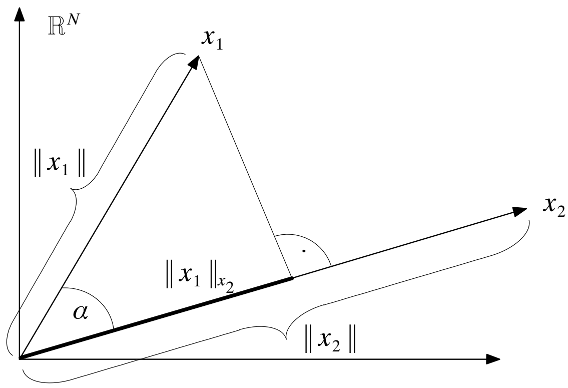
Bsp.

$$< x_1(t),x_2(t) > := \int_T \omega(t) \cdot x_1(t) \cdot x_2^*(t)\, dt; \text{ Gewichtsfunktion } \omega(t) \geq 0, \text{ stetig, fest } \forall\, x_{1,2}$$

$$< s_1(t),s_2(t) > \Big|_{\omega=1} := \int_T s_1(t) \cdot s_2^*(t)\, dt \rightarrow \| s(t) \|_2 = \sqrt{\int_T |s(t)|^2 dt}$$

$$< \underline{x}_1,\underline{x}_2 > := \sum_{\mu \in \mathbb{N}} x_1(\mu) \cdot x_2^*(\mu) \rightarrow \| \underline{x} \|_2 = \sqrt{\sum_{\mu} |x(\mu)|^2}$$

- Geometrische Interpretation im $\mathbb{R}^N$



Es gilt in $\mathbb{R}^N$: $\cos\alpha = \dfrac{< x_1,x_2 >}{\| x_1 \| \cdot \| x_2 \|}$

Länge der Projektion von x_1 auf x_2

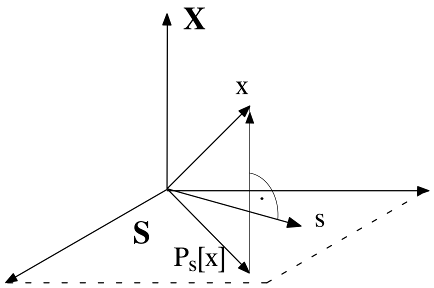
$$\| x_1 \|_{x_2} = \| x_1 \| \cdot \cos\alpha = \frac{< x_1,x_2 >}{\| x_2 \|}$$

- Orthogonale Vektoren ($\alpha = 90^\circ$): $< x_1,x_2 > = 0$.

2.1.7 Basis

- Projektionssatz: Unterraum $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$: Es gibt eine Projektion $P_s[x]$ von $x \in \mathbf{X}$ in $\mathbf{S}$ so, dass $\forall\, s \in \mathbf{S}$ gilt: $< (x - P_s[x]), s > = 0$.

  $\longrightarrow$ Es gilt $\forall\, s \neq P_s[x]$: $\| x - P_s[x] \| < \| x - s \|$.



- Basis: $\mathbf{E} \subset \mathbf{S}$ ist eine Basis von $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ ein Unterraum), wenn
  - alle $e_i \in \mathbf{E}$, $i=0,1,...,N-1$ linear unabhängig sind ($\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot e_i \neq 0 \quad \forall \vec{\lambda} \neq \vec{0}$),
  - alle $x \in \boldsymbol{U}$ dargestellt werden können durch $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot e_i = x$;
  - die Mindestanzahl von Basisvektoren N heißt die Dimension von $\mathbf{U}$.

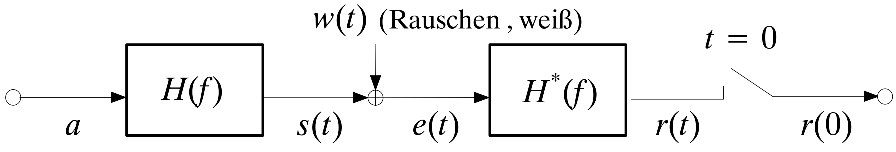
- Orthonormale Basis, wenn $< e_i, e_j > = \begin{cases} 1: & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall\, e_i, e_j \in \boldsymbol{S}$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot e_i \quad \forall\, x \in \mathbf{X} \ \text{ mit } \ \lambda_i = < x, e_i >$$

Bsp: Fourier−Reihenentwicklung (Approximation einer Fkt. $x(t) \in \boldsymbol{X}$ durch $\tilde{x}(t) \in \boldsymbol{U}$)
Sei $x(t), t \in \overline{\boldsymbol{T}} = [-1, 1]$, stetig. Approx. durch Sinoide $e_i = e^{j2\pi \cdot t \cdot i}, i = 0, \pm 1, \pm 2, .., \pm n$:

$$\tilde{x}(t) \sim \sum_{i=-n}^{n} \lambda_i \cdot e^{j2\pi \cdot t \cdot i} \ \text{ mit } \lambda_i = \int_{-1}^{1} x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot t \cdot i} dt, \ \text{ wobei } \| x(t) - \tilde{x}(t) \| \rightarrow 0 \ \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

2.1.8 Anwendung: Matched Filter−Empfänger



$$s(t) = a \cdot h(t); \qquad H^*(f) \bullet\!\!-\!\!\circ \ h^*(-t) = \bar{h}(t)$$

Es ist :

$$r(0) = e(t) * h^*(-t) \big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \cdot h^*(0 + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \cdot h^*(t) dt = < e(t), h(t) >.$$

$\longrightarrow$ MF−Empfänger sucht den Anteil von *e(t)* ”in Richtung” der Sendeimpulsform *h(t)*.

2.1.9 Lineare zeitinvariante Abbildungen

$$x \in \mathbf{X} \longrightarrow \boxed{H} \xrightarrow{H[x] = y \in \mathbf{Y}}$$

Linear : $H[\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2] = \lambda_1 \cdot H[x_1] + \lambda_2 \cdot H[x_2]$.

- $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^N$: $\underline{y} = K \cdot \underline{x}$: Matrixmultiplikation

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \Rightarrow y(\nu) = \sum_{\mu=1}^{N} k_{\nu\mu} \cdot x(\mu) \quad , \quad \nu = 1,..,N.$$

- $x(t), y(t) \in \mathbb{C}$: $y(t) = \int_T k(t,\tau) \cdot x(\tau) d\tau$: Integraltransformation.

– Skalarprodukt: $< x_1, H[x_2] > = < \overline{H}[x_1], x_2 >$

– Adjungierter Operator
- $\overline{k}_{\nu\mu} = k^*_{\mu\nu} \Rightarrow \overline{K} = (K^T)^* = K^H$(hermitesch transponiert)
- $\overline{k}(t,\tau) = k^*(\tau, t)$.

– Verkettung

$$\xrightarrow{x} \boxed{H_1} \xrightarrow{y} \boxed{H_2} \xrightarrow{z}$$

$$\underbrace{\boxed{H_1} \longrightarrow \boxed{H_2}}_{H_{ges} = H_2 \bigcirc H_1}$$

- Kommutativer Operator :

$H_{ges} = H_2 \bigcirc H_1 = H_1 \bigcirc H_2$

- Inverser Operator :

$H \bigcirc H^{-1} = I$ (identische Abb.)

Anwendung

1.) Faltung

$$y(t) = \underbrace{h(t)}_{H[\ \cdot\ ]} * x(t) = \int \underbrace{h(t-\tau)}_{k(t,\tau) = h(t-\tau)} \cdot x(\tau) d\tau$$

$$\underline{y} = \underbrace{\underline{h}}_{H[\ \cdot\ ]} * \underline{x} \rightarrow y(\nu) = \sum_{\mu} \underbrace{h(\nu - \mu)}_{k_{\nu\mu} = h(\nu-\mu)} \cdot x(\mu) \quad \rightarrow K\text{:Toeplitz−Matrix}$$

Antwortlänge beachten !!!

- Kommutativ: $x * h = h * x$.
- Identische Abb. $\longrightarrow$ $\delta-$Distribution : $\delta * x = x$, $h * h^{-1} = \delta$; $\mathrm{Im}[\delta(t)] = 0$!

– $\int_T x(t) \cdot \delta(t-\tau) dt = x(\tau) = < x(t), \delta(t-\tau) >$,

– $x(t) * \delta(t - \tau) = x(t - \tau)$.

- Adjungierte Impulsantwort: $\overline{h}(t) = h^*(-t)$,

  es gilt: $\overline{h}(t - t_0) = h^*(-t - t_0)$

  $\delta(t) = \overline{\delta}(t)$

  Anwendung: MF−Empfänger :

  $r(0) = \langle e,h \rangle = \langle e,h * \delta \rangle = \langle \overline{h} * e,\delta \rangle = h^*(-t) * e(t) \Big|_{t=0}$ q.e.d. .

2.) <u>Fourier−Transformation</u> :

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_T \underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{k(f,t) = e^{-j2\pi ft}} \cdot x(t)dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_T \underbrace{e^{+j2\pi tf}}_{k^*(t,f) = \overline{k}(f,t)} \cdot X(f)df$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$: Rücktransformation = adjungierter Operator

$$\Rightarrow \quad \langle X(f),Y(f) \rangle = \langle \mathcal{F}[x],\mathcal{F}[y] \rangle = \langle \underbrace{\overline{\mathcal{F}}}_{=\mathcal{F}^{-1}}[\mathcal{F}[x]],y \rangle = \langle x(t),y(t) \rangle$$

$\longrightarrow$ Parsevalsche Gleichung : $\displaystyle\int_F |X(f)|^2 df = \| X(f) \|^2 = \| x(t) \|^2 = \int_T |x(t)|^2 dt$.

Es gilt : $\mathcal{F}[\overline{x}(t)] = X^*(f)$.

Hinweis <u>DFT</u> :

$$X(\nu) = \sum_{\mu=1}^{N} \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}\nu\mu}}_{k_{\nu\mu} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\nu\mu}} \cdot x(\mu)$$

$$x(\mu) = \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\frac{1}{N} e^{+j\frac{2\pi}{N}\mu\nu}}_{\frac{1}{N} \cdot k^*_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \cdot \overline{k}_{\nu\mu}} \cdot X(\nu)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{F}}^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \underline{\overline{\mathcal{F}}}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \underline{X},\underline{Y} \rangle = N \cdot \langle \underline{x},\underline{y} \rangle \quad , \quad \frac{1}{N} \cdot \| \underline{X} \|^2 = \| \underline{x} \|^2 .$$

Bei unendlich langen Folgen: <u>z−Transformation</u>

$$H(z) = Z[h(\mu)] = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} h(\mu) \cdot z^{-\mu}$$

$$h(\mu) = Z^{-1}[H(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) \cdot z^{\mu-1} dz$$

3.) Hermitescher Operator

Problem : $< x, h * y > \overset{!}{=} < \tilde{h} * x, \tilde{h} * y > = < x, \underbrace{(\overline{\tilde{h}} * \tilde{h})}_{= h} * y >$

$$h = \overline{\tilde{h}} * \tilde{h} \;\Rightarrow\; H(f) = \tilde{H}^*(f) \cdot \tilde{H}(f) = |\tilde{H}(f)|^2 \;\Rightarrow\; H(f) \in \mathbb{R}_0^+ \;.$$

Lösung: $H(f) \in \mathbb{R}_0^+ \;\Rightarrow\;$ 1.) $|h(0)| \geq |h(t)| \quad \forall \;\; t \neq 0$

2.) $h(t) = h^*(-t) = \overline{h}(t)$(selbst$-$adjungiert $\hat{=}$ hermitesch).

Verwendung : $< x, h * x > = \| \tilde{h} * x \|^2 \hat{=}$ quadratische Form.

4.) Autokorrelationsfunktion von Energiesignalen (Selbstähnlichkeit)

$$\phi_{xx}(\tau) := < x(t+\tau), x(t) > = \; ... \; = x(\tau) * \overline{x}(\tau) = \phi_{xx}^*(-\tau)$$

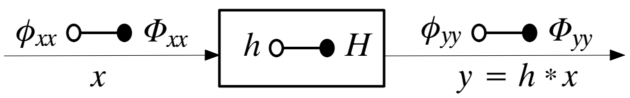
Hinweis: manche Autoren definieren $\phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} < x(t+\tau), x(t) >$, wenn $x(t) \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \;\; \phi_{xx} = x * \overline{x} = \overline{\phi}_{xx}$: AKF ist hermitesche Funktion

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2 \;\;\Rightarrow\;\;$ Signalenergie : $\int |x(t)|^2 dt = \phi_{xx}(0) = \|x\|^2 = \|X\|^2$.

Übertragungssystem



$\Phi_{yy} = |X \cdot H|^2 = \Phi_{xx} \cdot \underbrace{|H|^2}$

$\bullet\!\!-\!\!\circ \qquad\qquad \phi_h \circ\!\!-\!\!\bullet \Phi_h$

$\phi_{yy} = \phi_{xx} * \phi_h$

Energie : $\|y(t)\|^2 = \phi_{yy}(0) = \phi_{xx}(\tau) * \phi_h(\tau) \Big|_{\tau=0} = < \phi_{xx}(\tau), \phi_h(\tau) >$,

bei Folgen : $\|\underline{y}\|^2 = < \underline{\phi}_{xx}, \underline{\phi}_h > = \frac{1}{N} < \underline{\Phi}_{xx}, \underline{\Phi}_h >$.

2.2 Stochastische Signaltheorie

2.2.1 Grundbegriffe

● Wahrscheinlichkeit (axiomatische Definition nach Kolmogoroff)

Ω: Merkmalmenge − enthält alle Elementarereignisse $\omega \in \Omega$,

E : Ereignisfeld − enthält alle Ereignisse $\varepsilon \in \mathbf{E}$ = alle messbaren Teilmengen von Ω

$$(\emptyset\ ; \Omega ; \varepsilon \in \mathbf{E} \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} \in \mathbf{E} ; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{E} \Rightarrow \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \in \mathbf{E}),$$

Pr $[\varepsilon]$: Wahrscheinlichkeit − Maß für $\varepsilon \in \mathbf{E}$:

- $0 \le \Pr[\varepsilon] \le 1$;
- $\Pr[\Omega] = 1$
- $\Pr[\{\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2\}] = \Pr[\varepsilon_1] + \Pr[\varepsilon_2] - \Pr[\{\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2\}]$.

● Satz von Bayes: $\Pr[\{\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2\}] \mathrel{\hat{=}} \Pr[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \Pr[\varepsilon_1 | \varepsilon_2] \cdot \Pr[\varepsilon_2]$

$$\Rightarrow \Pr[\varepsilon_1 | \varepsilon_2] = \Pr[\varepsilon_2 | \varepsilon_1] \cdot \frac{\Pr[\varepsilon_1]}{\Pr[\varepsilon_2]} \quad , \quad \Pr[\varepsilon_2] \ne 0.$$

● Zufallsvariable (ZV): $\boldsymbol{x}(\omega)$ (= Abbildung auf reelle Zahlen: $\Omega \mapsto \mathbb{R}$): $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$

(*Hinweis: in diesem Kapitel kennzeichnen* ***fette*** *Buchstaben Zufallsvariable*)

● W.−Verteilungs−Funktion: $P_{\boldsymbol{x}}(x) := \Pr[\omega | \boldsymbol{x}(\omega) \le x] \underset{kurz}{|} =: \Pr[\boldsymbol{x} \le x]$,

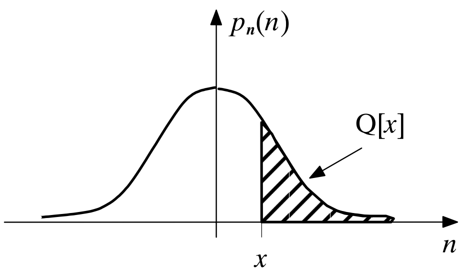
$$\Rightarrow P_{\boldsymbol{x}}(-\infty) = 0 \ , \ P_{\boldsymbol{x}}(+\infty) = 1.$$

●W.−Dichte−Funktion: $p_{\boldsymbol{x}}(x) := \frac{d}{dx} P_{\boldsymbol{x}}(x) \ge 0 \ ; \Leftrightarrow P_{\boldsymbol{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\boldsymbol{x}}(\xi) d\xi$,

− diskret: $\Pr[x_i] := \Pr[\omega | \boldsymbol{x}(\omega) = x_i] \rightarrow p_{\boldsymbol{x}}(x) = \sum_i \Pr[x_i] \cdot \delta(x - x_i)$.

−Bsp.: Gaußverteilte ZV:

$$p_{\boldsymbol{n}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot U_{\boldsymbol{n}}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{U_{\boldsymbol{n}}}\right)^2}$$



$U_{\boldsymbol{n}}^2$: Varianz (Wechselleistung) $U_{\boldsymbol{n}}$: Standardabweichung (Effektivwert des Wechselant.)

$$\text{Komplementäres Gaußsches Fehlerintegral: } Q[x] := \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-n^2}{2}} dn$$

$$\longrightarrow P_{\boldsymbol{n}}[x] = \Pr[\boldsymbol{n} \le x] = 1 - Q\left[\frac{x}{U_{\boldsymbol{n}}}\right].$$

Näherung: $Q[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $Q[x] \ll 0{,}01$

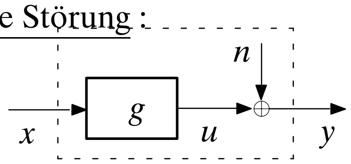
Summe gaußverteilter ZV n_i :

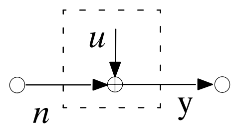
$$w = \sum_{i=1}^{M} c_i \cdot n_i \Rightarrow p_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,U_w} \cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{w}{U_w}\right)^2} \ , \ U_w^2 = \sum_{i=1}^{M} |c_i \cdot U_{n_i}|^2 \ .$$

- Verbundverteilte ZV $\longrightarrow$ Dichte $p_{xy}(x,y)$

$$P_{xy}[x,y] = \Pr[\{\omega' | x(\omega') \leq x\} \cap \{\omega' | y(\omega') \leq y\}] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p_{xy}(x',y')\,dy'dx'$$

- Statistisch unabhängige ZV: $p_{xy}(x,y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$.
- Addition von ZV: $z = x + y \Rightarrow p_z(z) = p_x(x) * p_y(y)$.
- Komplexwertige ZV:= $z = x + j \cdot y \rightarrow p_z(z) \mathrel{\hat{=}} p_z(x,y) \underset{oftmals}{|} = p_x(x) \cdot p_y(y)$.
- Gemischter Satz von Bayes : $\Pr[x|y] = p_y(y|x) \cdot \dfrac{\Pr[x]}{p_y(y)}$.
- Additive Störung :

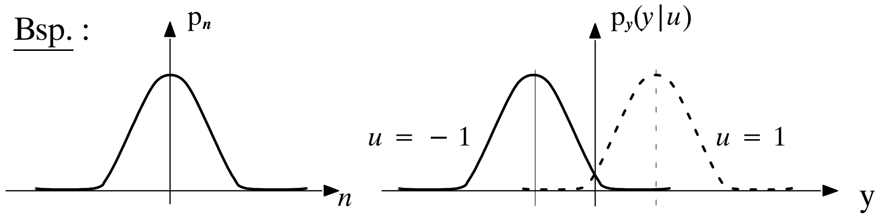




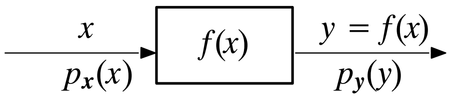
u: deterministisch

Es gilt : $p_y(y|u) = p_n(y-u)$.

Bsp. :



- Abbildungen



$$p_y(y) = \sum_{\substack{alle\ Lösungen \\ x_i = f^{-1}(y)}} \frac{p_x\left(x_i = f^{-1}(y)\right)}{\left|\frac{dy}{dx}\Big|_{x_i = f^{-1}(y)}\right|}$$

- Erwartungswert (Scharmittelwert) $\quad \mathrm{E}[f(x)] := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x') \cdot f(x')\,dx' \longrightarrow$

- Mittelwert: $\mu_x := \mathrm{E}[x]$,
- Quadr. Mittelwert: $\mathrm{E}[|x|^2]$,
- Varianz: $\sigma_x^2 := \mathrm{E}[|x - \mu_x|^2] = \mathrm{E}[|x|^2 - \mu_x^2$,

− ist linearer Operator, da

$\mathrm{E}[\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x)] = \lambda_1 \cdot \mathrm{E}[f_1(x)] + \lambda_2 \cdot \mathrm{E}[f_2(x)]$.

– Verbundverteilte ZV

$$E[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{xy}}(x',y') \cdot f(x',y')\,dy'dx'.$$

- Korrelation

$$E[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}^*] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{p_{\boldsymbol{xy}}(x',y')}_{\text{vgl. } g(x,y)\,\geq\, 0:\ \text{Gewichtsfunktion}} \cdot x' \cdot y^{*\prime}\; dy'dx' \;\hat{=}\; <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>_{\mathrm{p}}$$

ist ein Skalarprodukt im Hilbertraum der stochastischen Signale, da

1.) $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>_{\mathrm{p}} = E[|\boldsymbol{x}|^2] = 0 \Leftrightarrow x = 0$ mit $\Pr[x = 0] \rightarrow 1$,

2.) $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>_{\mathrm{p}} = E[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}^*] = E[\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}^*]^* = <\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>_{\mathrm{p}}^*$,

3.) $<(\lambda_1\cdot\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\cdot\boldsymbol{x}_2),\boldsymbol{y}>_{\mathrm{p}} = E[...] = \lambda_1\cdot<\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}>_{\mathrm{p}} + \lambda_2\cdot<\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}>_{\mathrm{p}}$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^2 = <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>_{\mathrm{p}} = E[|x|^2]\;\Big|_{\mu_x=0} = \sigma_x^2.$$

⟶ $0 = E[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}^*] = <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>_{p}$: orthogonale ZV.

⟶ Korrelationskoeffizient $\varrho_{xy} := \dfrac{E[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}^*]}{\sqrt{E[|\boldsymbol{x}|^2]\cdot E[|\boldsymbol{y}|^2]}} = \dfrac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>_{\mathrm{p}}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}\cdot\|\boldsymbol{y}\|_{\mathrm{p}}} = \cos\alpha$.

⟶ Es gilt bei *statistisch unabhängigen* ZV: $E[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}^*]\;\Big|_{st.unabh.} = E[\boldsymbol{x}]\cdot E[\boldsymbol{y}^*] = \mu_{\boldsymbol{x}}\cdot\mu_{\boldsymbol{y}}^*.$

- Unkorrelierte ZV heißt: $E[(\boldsymbol{x}-\mu_{\boldsymbol{x}})\cdot(\boldsymbol{y}-\mu_{\boldsymbol{y}})^*] = E[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}^*] - \mu_{\boldsymbol{x}}\cdot\mu_{\boldsymbol{y}}^* = 0$

- Statistisch unabh. ZV: ⇒ unkorreliert (Umkehrung gilt i. a.. nicht außer bei Gaußverteilung).

- Statistisch unabh. + mittelwertfrei ⇒ orthogonal : $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>_{\mathrm{p}} = E[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}^*] = 0$.

- Deterministische Größe ist orthogonal zu jeder mittelwertfreien ZV.

Im weiteren: mittelwertfreie ZV.