Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Elektro- und Informationstechnik

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Ralph Urbansky

9. Aufgabenblatt

zur Vorlesung

Einführung in Signale und Systeme

Stichworte: Abtasttheorem, diskrete Fouriertransformation, diskrete Faltung

1. Aufgabe

Es soll ein Aufzeichnungs- und Wiedergabegerät für bandbegrenzte Signale bis zu einer Frequenz von 96 kHz entwickelt werden. Da die weitere Verarbeitung der Signale geräteintern digital erfolgen soll, müssen die analogen Eingangssignale in zeit- und wertdiskrete Signale überführt werden. Bei der Wiedergabe müssen dementsprechend die Ausgangssignale in analoge Signale umgewandelt werden. Ein analoges Eingangssignal wird digitalisiert, indem es mit der Abtastfrequenz f_a abgetastet und anschließend quantisiert wird. Der Abtastvorgang soll ein zeitdiskretes wertkontinuierliches Signal $\{s_1(\nu)\}$ liefern, die Quantsierung soll an dieser Stelle nicht weiter betrachtet werden.

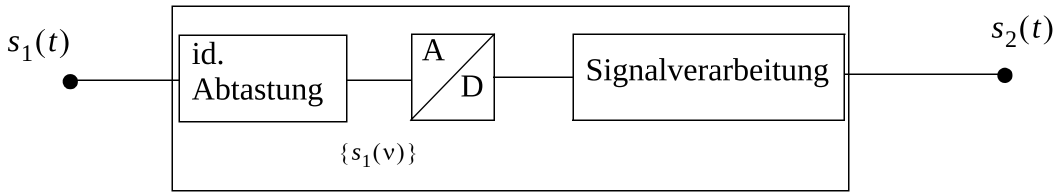

Bild 1.1: Aufnahmesystem

a) Wie groß darf der zeitliche Abstand T_a zwischen zwei Abtastwerten maximal sein, damit das aufgezeichnete Signal später wieder fehlerfrei wiedergegeben werden kann?

b) Mit welcher Frequenz f_a muss das Eingangssignal abgetastet werden, damit kein Aliasing auftritt?

c) Gehen Sie im Frequenzbereich von einem rechteckförmig bandbegrenzten Eingangssignal mit dem Spektrum $S_1(f) = rect\left(\frac{f}{2f_g}\right)$ aus. Zeichnen Sie dieses Signal sowie die periodischen Fortsetzungen im Abstand $F_p = f_a > 2f_g$. Berechnen Sie ferner die Fourierrücktransformierte von $S_1(f)$.

d) Schreiben Sie die Funktion $S_1(f)$ als Fourier-Reihe. Gehen Sie von den allgemeinden Beziehungen der Fourier-Reihe aus und berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k. Wie lassen sich in diesem Fall die Fourierkoeffizienten direkt aus der Zeitfunktion bestimmen?

e) Skizzieren Sie das Zeitsignal $s_1(t)$ sowie im gleichen Bild die Folge $\{s_1(\nu)\}$, die den mit F_p gewichteten Fourierkoeffizienten entspricht. Es soll gelten: $f_a = 2f_g$.

2. Aufgabe

Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte (DFT) $\{S(k)\}$ des zeitdiskreten Signals $\{s(n)\}$ mit

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } \; 0 \le n \le m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \text{ Hinweis: } \sum_{n=0}^{m} a^n = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$$

3. Aufgabe

Gegeben ist ein zeitdiskretes Übertragungssystem mit der Impulsantwortfolge $\{h(n)\}$ und der Eingangsfolge $\{s(n)\}$. Am Ausgang lässt sich die Folge $\{z(n)\}$ beobachten, siehe Bild 3.1.

$$\{s(n)\} \circ\!\!\longrightarrow \boxed{\;\{h(n)\}\;} \longrightarrow \{z(n)\}$$

Bild 3.1

Die Folgen $\{s(n)\}$ und $\{h(n)\}$ sind bekannt und haben die folgenden Werte: $\{s(n)\} = \{3, 1, 1\}$, $\{h(n)\} = \{1, 1\}$.

a) Berechnen Sie mit der diskreten Fouriertransformation die Folgen $\{S(k)\}$ und $\{H(k)\}$ für $N = 4$.
b) Berechnen Sie mittels der diskreten Faltung das Ausgangssignal $\{z(n)\}$ aus $\{s(n)\}$ und $\{h(n)\}$.
c) Berechnen Sie nun ausgehend von $\{S(k)\}$ und $\{H(k)\}$ die diskrete Fouriertransformierte $\{Z(k)\}$.
d) **Berechnen** Sie ausgehend von $\{Z(k)\}$ durch die inverse diskrete Fouriertransformation die Ausgangsfolge $\{z(n)\}$.
e) Warum liefert der Umweg über die Spektraldarstellung (Aufgabenteil c) und d)) das gleiche Ergebnis für $\{z(n)\}$ wie die diskrete Faltung von $\{s(n)\}$ und $\{h(n)\}$? Ist dies immer so? Was muss insbesondere für N gelten?

4. Aufgabe

Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes Übertragungssystem, dessen Impulsantwort durch $h(t)$ beschrieben wird. Das Eingangssignal wird allgemein mit $s_1(t)$ und das Ausgangssignal mit $s_2(t)$ bezeichnet. Unter welchen Voraussetzungen liefert die diskrete Faltung der abgetasteten Signale $h(\nu T_a)$ und $s_1(\nu T_a)$ Abtastwerte des Signals $s_2(t)$? Ist eine völlige Übereinstimmung zu den Abtastzeitpunkten überhaupt möglich? Worin unterscheidet sich das Ergebnis der diskreten Faltung von dem Ergebnis der kontinuierlichen Faltung zu den Abtastzeitpunkten νT_a?
b) Unter welchen Voraussetzungen liefert die diskrete Fouriertransformation eines Signals Abtastwerte der kontinuierlichen Fouriertransformation des Signals?